



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Restauración de imaxes dixitais mediante técnicas matemáticas

Jeniffer Torrón Yáñez

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Restauración de imaxes dixitais mediante técnicas matemáticas

Jeniffer Torrón Yáñez

Xullo 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Matemática Aplicada</b>
<b>Título: Restauración de imaxes dixitais mediante técnicas matemáticas</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
A restauración de imaxes dixitais (en inglés inpainting) é un proceso que permite recuperar partes da imaxe que están deterioradas ou ocultas por outro obxecto. Neste traballo estudarase algún método de restauración baseado en EDPs ou interpolación, xunto coa súa implementación numérica.
<b>Recomendacións</b>
Coñecemento da teoría clásica de derivación numérica e do método de diferencias finitas (introducidos na materia “Cálculo numérico nunha variable”) para resolver ecuacións diferenciais en derivadas parciais, e unha linguaxe de programación (MatLab).
<b>Outras observacións</b>



# Índice xeral

<b>Resumo</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. Restauración dunha imaxe dixital</b>	<b>1</b>
1.1. Procesado de imaxes . . . . .	1
1.2. Restauración de imaxes (inpainting) . . . . .	2
1.3. Dificultades do proceso de restauración dixital . . . . .	6
1.4. Enfoque matemático do problema . . . . .	7
1.5. Métodos variacionais para a restauración de imaxes dixitais . . . . .	7
<b>2. Restauración harmónica de imaxes</b>	<b>9</b>
2.1. Formulación de ecuacións diferenciais locais . . . . .	9
2.2. Formulación variacional global . . . . .	11
<b>3. Resultados numéricos</b>	<b>15</b>
3.1. Algoritmo numérico de resolución . . . . .	15
3.2. Exemplos de restauración harmónica . . . . .	16
<b>Bibliografía</b>	<b>33</b>
<b>Apéndice</b>	<b>35</b>
<b>Programa de inpainting</b>	<b>37</b>





## **Resumo**

O traballo comeza cunha descrición do problema de restauración dixital (inpainting). A continuación propónse un modelo variacional para dito problema. Continúase transformando o problema variacional nun problema evolutivo auxiliar para a súa posterior resolución numérica. Finalmente, propóñense exemplos prácticos para por de manifesto as bondades e inconvintes do método.

## **Abstract**

The work begins with a description of the digital restoration problem (inpainting). A variational model for this problem is then proposed. Afterwards, the variational problem is transformed into a partial derivative equation boundary problem, which is solved by resorting to an auxiliary evolutive problem in order to solve it numerically. Finally, practical examples are proposed to highlight the benefits and drawbacks of the method.



# Introdución

Informalmente, tal e como define Bertalmio [1] no seu traballo de restauración, unha imaxe dixital é unha aproximación dunha escea do mundo real. É un feito incontestable que as imaxes dixitais están presentes cada vez máis na vida cotiá. Menciónense a continuación algunhas situacións onde o papel das imaxes é importante:

- Fai tempo que xa se sacan fotografías de persoas ou paisaxes con cámaras dixitais, onde antes se empregaban cámaras analóxicas.
- Moitas profesións teñen asociadas tipos especiais de imaxes, como imaxes médicas (radiografías como se pode observar na Figura 1, tomografías, resonancias magnéticas, etc), imaxes de microscopio eléctrico en bioloxía, imaxes da corteza terrestre en xeoloxía, de cámaras de seguridade ou dun aparcamento subterráneo, de obras de arte (imaxes exteriores e interiores empregando raios infravermellos ou raios X), etc.



Figura 1: Uso da imaxe dixital no ámbito sanitario. Radiografía.

As imaxes deben organizarse e procesarse para sacar información relevante delas, preferiblemente de maneira automatizada, o que deu lugar á disciplina coñecida polo nome de *procesamento de imaxes*. O procesamento automatizado de ditas imaxes non ten necesariamente o único fin de mellorar a súa calidade, senón tamén obter información pertinente

sobre o obxecto ou obxectos que as compoñen, como o tamaño, número de partículas, cor, etc.

De maneira xeral, unha imaxe dixital obtense dunha analóxica mediante os procedementos coñecidos como *mostrario* e *cuantización*. Grosso modo, a cámara dixital superpón unha malla regular na imaxe analóxica e asigna un valor a cada elemento da malla. Neste contexto, eses elementos chámanse píxeles. O contido da imaxe describirase mediante tonos de gris ou de cor. Normalmente, o tono de gris varía entre 0 e  $255 = 2^8 - 1$ , e fálase dunha imaxe en escala de grises de 8 bits; e os tonos de cor son vectores de tres compoñentes (r,g,b) onde cada compoñente representa a tonalidade de vermello, verde e azul de cada píxel. Normalmente o rango de cada cor estará tamén entre 0 e 255, e fálase dunha imaxe en cor de  $8 \cdot 3 = 24$  bits.

De maneira máis rigurosa dende o punto de vista matemático, pódese definir unha imaxe dixital como unha función  $f$  con dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : \Omega \rightarrow [0, 255]$  no caso de escala de grises, e  $f_c : \Omega \rightarrow [0, 255] \times [0, 255] \times [0, 255]$  no caso dunha imaxe a cor das anteriormente mencionadas. De modo xeral, segundo o problema que deba ser resolto e o tipo de imaxe que sexa preciso manexar, unha función poderá ser, por exemplo, un elemento dun espazo funcional tal como un espazo de Sobolev ou un espazo de funcións de variación acotada.

Este estudo céntrase en imaxes en escala de grises por simplicidade, pois para imaxes a cor abundará aplicar o mesmo algoritmo que en escala de grises a cada compoñente da función que representa a imaxe. Non obstante, nos exemplos tratados na sección 3.2 verase tamén como o algoritmo funciona no caso dunha imaxe a cor.

A idea preliminar da restauración dixital é proporcionar métodos para a mellora da calidade de imaxes desgastadas polo paso do tempo ou factores como a humidade, obtendo así unha fotografía o máis parecida posible á orixinal. Dito proceso pode inspirarse nos métodos da restauración analóxica, ou ben utilizar algoritmos matemáticos e as posibilidades de cálculo do ordenador para escribir un programa que execute a análise e obter resultados máis ou menos aceptables.

# Capítulo 1

## Restauración dunha imaxe dixital

### 1.1. Procesado de imaxes

Para fixar ideas, resúmense brevemente as tarefas máis comúns do procesamento de imaxes.

- Eliminación de ruído dunha imaxe (denoising). No proceso de creación dunha imaxe dixital a partir dunha analóxica, xa sexa nunha cámara dixital ou nun escáner ou similar, é inevitable engadir información incorrecta á imaxe, por moi grande que sexa a resolución do aparato en cuestión. A parte de mellorar o aspecto estético da imaxe, é importante eliminar dito ruído porque pode obstaculizar ao ordenador na análise automática posterior da imaxe.
- Enfoque da imaxe (deblurring). A creación da imaxe dixital pode levar consigo a aparición de zonas con efectos borrosos. Algunhas das posibles causas son: un enfoque do obxecto incorrecto, movementos da cámara durante a exposición, movementos do obxecto fotografado, néboa, turbulencias atmosféricas en imaxes astronómicas, respiración do paciente que produce movemento nunha imaxe médica, etc. O enfoque consiste en eliminar da imaxe eses efectos borrosos, na medida do posible.
- Segmentación. Como a palabra indica, aquí búscase segmentar a imaxe en subimaxes dos diferentes obxectos que a compoñen. O caso máis sinxelo é a segmentación binaria dun obxecto e o fondo, pero hai casos máis complexos, por exemplo, varias partículas en suspensión ou células dun tecido. Normalmente a segmentación é un primeiro paso para a obtención de información pertinente sobre os obxectos correspondentes (forma, cantidade, etc).
- Restauración (inpainting ou desoclusión). É a tarefa obxectivo deste traballo. Con-

siste no proceso de encher partes faltantes (ocos) da imaxe a partir da información obtida da parte intacta da imaxe. Esencialmente é un tipo de interpolación, e conceptualmente diferente dos procesos de eliminación de ruído e do enfoque, porque aquí perdeuse toda a información nos píxeles que compoñen certas áreas, e non só parte dela. Ademais, os ocos son normalmente de certo tamaño, é dicir, moito maiores que o tipo de ruído tratado mediante algoritmos comúns de mellora de imaxes.

Este proxecto céntrase en restaurar aquelas imaxes que perderon tonalidade ou pintura e presentan entón zonas baleiras, co fin de encher os ocos e poder así recuperar o contido orixinal.

## 1.2. Restauración de imaxes (inpainting)

O termo en lingua inglesa inpainting é un termo clásico en restauración artística que designa a restauración ou interpolación de imaxes, é dicir, o recheo das partes faltantes de imaxes danadas polo paso do tempo ou outros motivos a partir da información obtida das áreas adxacentes. No contexto dixital, apareceu por primeira vez no traballo pioneiro de Bertalmio [1], onde os autores deseñan unha ecuación diferencial que intenta imitar o traballo de restauración analóxico que realiza un restaurador ou copiador de museo, prolongando liñas nas partes faltantes para unir anacos de obxectos nun só.

Neste traballo, asígnaselle ao termo inpainting un significado exclusivamente dixital, tal é como emprega Bertalmio [1], e terá que ver co uso de ecuacións diferenciais para conseguir o obxectivo de restauración da imaxe. Algunhas aplicacións da restauración dixital poden ser:

1. Eliminar raiaduras, Figura 1.1.
2. Borrar textos ou publicidade, Figura 1.2.
3. Ocultación de obxectos, Figura 1.3.
4. Restauración de imaxes de satélites en estradas para que poidan verse sen as árbores.



Figura 1.1: Eliminación de raiaduras dunha imaxe dixital.



Figura 1.2: Eliminación de texto dunha imaxe dixital.



Figura 1.3: Ocultación de obxectos.

O problema da restauración de imaxes estivo moi recentemente no espello público, concretamente no ano 2012. Nestas datas unha restauradora afeccionada de 80 anos de idade, Cecilia Giménez, transformouse nun personaxe mediático por intentar restaurar un fresco dunha igrexa de Borja (Zaragoza) na que aparecía pintada a figura dun Ecce Homo de aproximadamente un século de antigüidade. O resultado da restauración non só dista moito da pintura orixinal, senón que é ridículo e produce hilaridade, como se pode observar na Figura 1.4.



Figura 1.4: Restauración do Ecce Homo por Cecilia Giménez.

A pesar das desastrosas consecuencias do traballo, e de maneira totalmente inesperada, a restauración fallida levantou tales expectativas que as visitas á igrexa aumentaron de xeito espectacular. Ademais, visto que o orixinal era simplemente unha copia máis dunha coñecida pintura italiana, e entón sen gran valor artístico, decidiuse manter dita restauración en lugar de intentar corrixila, unha ironía máis do destino.

Posteriormente, os medios de comunicación continuaron facéndose eco de máis restauracións levadas a cabo por afeccionados que si foi preciso desfacer para refacelas de maneira profesional. O resultado final destes sucesos é que o problema de restaurar obras de arte de maneira fidedigna fíxose coñecido do gran público, o que engade aínda máis interés. Tamén cabe destacar admirables restauracións como é o caso do Pórtico da Gloria da catedral de Santiago de Compostela, pois ante unha situación crítica causada polo paso do tempo, conseguíuse un magnífico resultado final.

Nos últimos días coñeceuse unha “nova obra” de restauración coñecida como o Ecce Homo



valenciano (Figura 1.5). Un coleccionista encargou a limpeza dunha obra do século *XVII* dunha copia dunha Inmaculada de Murillo a un restaurador de mobles, quen alterou completamente o seu rostro deixando así un resultado semellante á obra de Borja.



Figura 1.5: Restauración dunha copia dunha inmaculada de Murillo.

Os comezos da restauración dixital foron traballo de enxeñeiros e informáticos, cuxos métodos estaban basados en métodos estatísticos e algoritmos de interpolación de imaxes. As linguaxes de programación máis empregadas hoxe en día no procesamento de imaxes son MatLab e Python. Neste traballo emprégase MatLab para a programación dos algoritmos que se describirán.

Máis adiante, os matemáticos tamén fixeron causa común aplicando ecuacións diferenciais e métodos variacionais á restauración dixital. Como xa se mencionou anteriormente, Bertalmio [1] aportou novas ferramentas matemáticas empregando ecuacións en derivadas parciais para a restauración de imaxes dixitais. O algoritmo deseñado por el axudaba a repintar imaxes e mesmo podía borrar obxectos que se desexaban suprimir da fotografía.

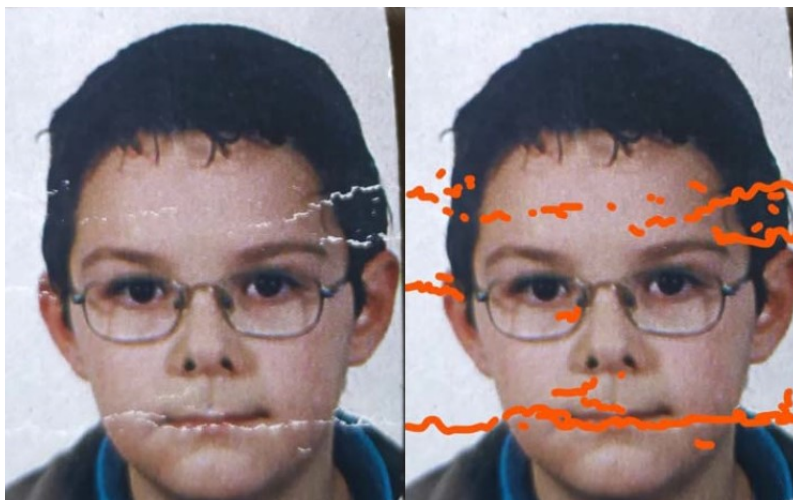


Figura 1.6: Eliminación de raiaduras dunha fotografía co algoritmo proposto por Bertalmio [1].

O primeiro paso sería marcar dunha mesma cor toda a área a restaurar como se amosa na Figura 1.6, neste caso, son zonas que perderon a cor e se queren repintar. Na primeira fase énchese o interior das marcas. Posteriormente, realízase un segundo algoritmo, a través do cal se estende o repintado do interior á súa fronteira para evitar deixar sinais de que a foto foi restaurada.

### 1.3. Dificultades do proceso de restauración dixital

Cítanse a continuación algunhas dificultades no proceso de restauración de imaxes:

- Non é posible saber o que realmente había na parte que falta, só se pode intentar adiviñar tomando como referencia a parte da imaxe conservada. Por moi seguros que se estea do paso, nunca se terá total certeza.
- A día de hoxe, os métodos automáticos non son tan eficaces como o cerebro humano.
- O gran desafío é reconstruír de maneira realista a estrutura (obxectos) e a textura (cor e patróns) de maneira simultánea.
- A solución non é necesariamente única.
- A dificultade do problema aumenta radicalmente cando o tamaño da área estragada na imaxe aumenta. Por exemplo, é máis difícil reproducir áreas grandes conectadas na imaxe que uns cantos buratos non conectados, aínda que a área total sexa a mesma.

É aquí onde as ecuacións en derivadas parciais (EDPs) de orde alto poden aportar capacidade de análise, malia que o estudo destas non é obxecto deste traballo. Para máis detalles consultar libro de Schönlieb [8].

- Unha solución pode ser o “principio de boa continuación”, é dicir, intentar conectar entre si as estruturas que a parte faltante deixa desconectadas.

## 1.4. Enfoque matemático do problema

Matematicamente, tómasse a imaxe inicial definida nun dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Dito dominio  $\Omega$  inclúe unha parte danada  $D \subset \Omega$ , de xeito que existen problemas á hora de definir a función imaxe nesa zona estragada. Entón pártese dunha imaxe definida a través dunha función  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , e búscase atopar a imaxe orixinal  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  como a solución do problema seguinte:

$$Tu = f, \quad (1.1)$$

sendo  $T$  o operador que modela o cambio. Cabe resaltar que a imaxe  $u$  non ten por que ser estritamente coincidente con  $f$  fóra da zona estragada. Adicionalmente, pódense atopar outros problemas, pois se  $f$  non se coñece exactamente, existe un erro  $\delta > 0$  de xeito que o problema (1.1) se transforma en:

$$Tu = f + \delta. \quad (1.2)$$

Abórdase a continuación o estudo dalgún operador  $T$  que realice a restauración dixital mediante técnicas de cálculo de variacións.

## 1.5. Métodos variacionais para a restauración de imaxes dixitais

Considérase unha imaxe  $f$ , na que aparecen ruídos, obxectos non desexados, manchas ou outros defectos. O obxectivo é reconstruír a imaxe inicial  $u$  a partir de  $f$ , ámbalas dúas descritas na sección anterior.

Matematicamente, isto consiste en resolver a ecuación (1.1) que na práctica farase mediante análise numérica. Dita ecuación será o resultado de resolver un problema de minimización adecuado (problema variacional) seguindo un esquema xeral proposto por Schönlieb [8], que se describe a continuación.

Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dominio aberto e acotado con fronteira de Lipschitz, e sexan  $B_1, B_2$  dous espazos de Banach tales que  $B_2 \subseteq B_1$ , denótese por  $f \in B_1$  a imaxe defectuosa e  $D \subset \Omega$  o

dominio que se trata recuperar. Formúlese un enfoque variacional xeral na restauración de imaxes como un problema de minimización para un custo funcional regular  $J : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$J(u) = R(u) + \frac{1}{2} \| \lambda(f - u) \|_{B_1}^2 \rightarrow \min_{u \in B_2},$$

onde  $R : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$  e

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_0 & \text{se } x \in \Omega \setminus D \\ 0 & \text{se } x \in D \end{cases}$$

que ven sendo a constante  $\lambda_0 \geq 1$  multiplicada polo indicador de  $\Omega \setminus D$ , é dicir:

$$\begin{aligned} 1_{\Omega \setminus D} : \Omega &\rightarrow \{0, 1\} \\ 1_{\Omega \setminus D}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \setminus D \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \setminus D. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

O *termo de fidelidade*  $\| \lambda \cdot (f - u) \|_{B_1}^2$  forza ao mínimo  $u$  a permanecer preto da imaxe  $f$  fóra do dominio de restauración, e  $R(u)$  denota un *termo regularizante* (débesse pensar que a parte faltante representa un salto que se debe regularizar) que representa certa información a priori da imaxe, como o espazo funcional onde se debe buscar a imaxe restaurada. Finalmente, a constante  $\lambda$  permite dar máis ou menos influencia no resultado final a cada un dos termos.

Nótese que este enfoque variacional actúa no dominio total  $\Omega$ , e non só no dominio faltante  $D$ . A vantaxa é que se elimina simultaneamente ruído de toda a imaxe e fai que o proceso poida realizarse independentemente do número e forma dos buratos da imaxe.

## Capítulo 2

# Restauración harmónica de imaxes

A restauración harmónica de imaxes é un dos métodos máis básicos, sinxelos e mellor comprendidos para o propósito deste traballo. A imaxe restaurada compútase como unha solución dunha ecuación en derivadas parciais con operador harmónico, que virá sendo un minimizador de enerxía de Dirichlet sobre o dominio restaurado,  $D$ , como se viu no capítulo anterior. Na práctica constitúe un proceso de interpolación que enche aproximadamente uns valores de grises que faltan promediando os valores de grises dados no límite do dominio de pintado. Formúlanse os procedementos de repintado a continuación.

### 2.1. Formulación de ecuacións diferenciais locais

Seguindo o libro de Schönlieb [8], pártese de  $f \in L^2(\Omega)$  cuxos valores de grises perdéronse dentro do dominio a restaurar  $D \subset \Omega$ . Supóñase que  $D \subset \Omega$  é un dominio cuxa fronteira é unha curva continua e simple de Jordan. No que segue, os espazos  $B_1$  e  $B_2$  elixíranse en  $H^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$  respectivamente. Entón, a imaxe restaurada  $u \in H^1(D)$  compútase como a solución débil da ecuación:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & \text{en } D, \\ u &= f, & \text{en } \partial D,\end{aligned}\tag{2.1}$$

que, pódese escribir en forma variacional como segue (Brézis [9]):

$$\begin{aligned}\int_D \nabla u \cdot \nabla \psi dx &= 0, \quad \forall \psi \in H_0^1(D), \\ u &= f, \quad \text{en } \partial D.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Chámaselle solución débil de (2.1) á extensión harmónica de  $u$  a  $f$  dende  $\Omega \setminus D$  a  $D$ . A imaxe restaurada é unha extensión simple de  $f$  dentro do dominio  $D$ . A solución  $u$  de

(2.1) pode entenderse tamén (Schönlieb [8]) como a solución do problema de minimización (Brézis [9]):

$$\min_{u \in H^1(D)} \left\{ \int_D |\nabla u|^2 dx, \quad \text{sempre que, } u = f, \quad \text{en } \Omega \setminus D \right\}.$$

A continuación, resúmese o estudo teórico da solución do problema feito en Schönlieb [8]. Chan e Shen [11] describiron a extensión regular  $f$  como a suma dun termo harmónico e outro anti-harmónico aos que se lles aplica a función de Green, entendendo esta como un operador lineal que ten forma de integral cuxo núcleo deste operador integral é a función de Green propiamente dita. A idea deste método é atopar unha función de dúas variables continua e diferenciable que verifique a ecuación (2.3). Sexan pois,  $x = (x^1, x^2) \in D$ ,  $G(x, x_0)$  a función de Green e  $x_0 \in D$ , entón:

$$-\Delta G = \delta_{x-x_0} \text{ en } D, \quad G = 0 \text{ en } \partial D, \quad (2.3)$$

onde  $\delta$  é a distribución delta de Dirac.

Aplicando a segunda fórmula de Green (Brézis [9]) á imaxe  $f$  e a función  $G$  de Green, tense unha definición para  $f$  en cada punto  $x_0 \in D$ :

$$f(x_0) = \int_{\partial D} f(x(s)) \cdot \frac{-\partial G(x_0, x(s))}{\partial \vec{n}} ds + \int_D G(x_0, x) \cdot (-\Delta f) dx,$$

que como xa se explicou, a primeira compoñente da expresión da dereita, que se denota por  $f^h$ , é a parte harmónica da función  $f$  e o segundo termo, denotado por  $f^a$  é a parte anti-harmónica de  $f$ . Máis precisamente,  $f^h(x_0) = u(x_0)$  é a extensión de  $f|_{\partial D}$  con respecto a  $\frac{-\partial G(x_0, x(s))}{\partial \vec{n}} ds$  en  $x_0 \in D$ , e o resto,  $f^a(x_0)$  é o erro que comete a extensión harmónica con respecto á verdadeira imaxe simple  $f$ . Por iso é preciso un mellor control do termo anti-harmónico para obter así mellor precisión das extensións harmónicas para a interpolación. Para un mellor control do termo anti-harmónico realízanse estimacións sobre a función de Green  $G$ . Máis precisamente:

**Teorema 2.1.** *Sexa  $d$  o diámetro do dominio restaurado  $D$ , é dicir,  $d = \max_{x, y \in \partial D} |x - y|$ . Sexa  $G$  a función de Green de (2.3). Entón:*

$$\int_D G(x_0, x) dx \leq \frac{d^2}{4}.$$

Empregando o anterior teorema, a extensión harmónica  $u = f^h$  da función simple  $f$  en  $D$  non é exacta. En efecto, para ningunha función simple  $f$  en  $D$  se pode atopar unha cota uniforme  $M$  do seu Laplaciano, é dicir,  $|\Delta f| \leq M$  en  $D$ . Polo tanto:

$$|f(x_0) - f^h(x_0)| = |f^a(x_0)| \leq M \cdot \int_D G(x_0, x) dx \leq \frac{M \cdot d^2}{4},$$

para todo  $x_0 \in D$ . Logo  $\|f - u\|_\infty = \|f - f^h\|_\infty = \mathcal{O}(d^2)$ , que é o erro máximo da restauración harmónica (2.1) cometido.

Chan e Kang [10] engadiron unha análise máis detallada para a estimación do erro substituíndo o diámetro  $d$  da rexión restaurada por un eixo menor  $b$  dunha elipse que cobre  $D$ .

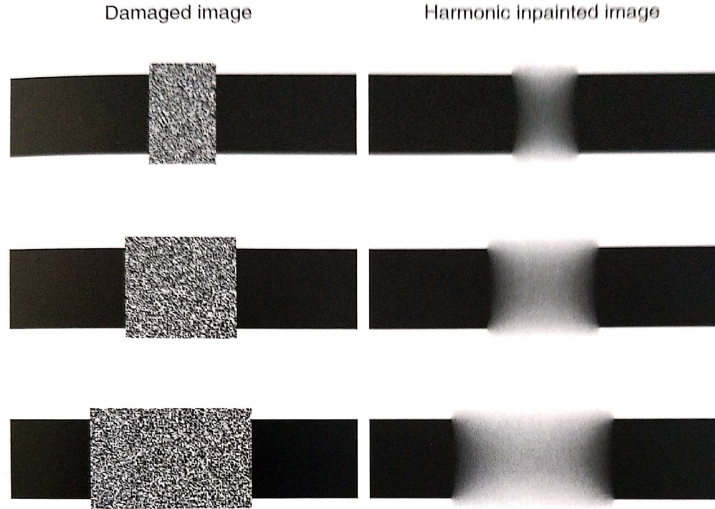


Figura 2.1: Avaliación da restauración harmónica. Aceptando a liña conectada como a solución desexada para o problema de restauración. A restauración harmónica non interpola discontinuidades e incrementa o erro cando os ocos son maiores (Schönlieb [8]).

A Figura 2.1 amosa un raio negro sobre un fondo branco. A raia contén uns ocos cada vez maiores. A restauración harmónica falla claramente, especialmente se se ten o principio de continuidade en mente. Pero na restauración de imaxes dixitais con pequenos ocos o resultado da restauración é aceptable.

## 2.2. Formulación variacional global

Sexan  $f \in L^2(\Omega)$  a imaxe dada con dominio por restaurar  $D \subset \Omega$  e  $\mathbf{1}_{\Omega \setminus D}$  a función característica de  $\Omega \setminus D$ , (1.3). Entón, a imaxe restaurada  $u$  pode ser definida como o minimizador do seguinte funcional en  $H^1(\Omega)$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \|\mathbf{1}_{\Omega \setminus D}(u - f)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.4)$$

onde  $\lambda \gg 1$  é unha constante. Un minimizador caracterízase como a solución da ecuación correspondente de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{en } D, \\ -\Delta u &= \lambda \cdot (f - u) && \text{en } \Omega \setminus D, \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

como se verá.

Pártese da información que proporciona  $f$  e  $\lambda$  para poder reconstruír a imaxe, e obter así, a imaxe orixinal  $u$  mencionada no capítulo 1. Compre lembrar que estase a traballar con imaxes en escala de grises, e polo tanto, pártese dun dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Para a posterior transformación do problema variacional nun problema de contorno asociado a unha ecuación en derivadas parciais (EDPs) establécese o seguinte problema de minimización para un funcional de enerxía  $E(u)$ . Calcúlase  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u \in H_0^1(\Omega)$  minimice o seguinte funcional:

$$E(u) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \|1_{\Omega \setminus D}(u - f)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Sexa  $u$  unha función regular tal que  $u$  fai mínimo o funcional anterior. Próbese a continuación que  $u$  é solución de certa ecuación en derivadas parciais chamada ecuación de Euler-Lagrange seguindo o esquema proposto por Evans [11]:

Sexa  $v(x, y)$  unha función regular definida en  $\Omega$ , de soporte compacto, de xeito que  $v$  e as súas derivadas de primeira orde anúlanse na fronteira de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ . Considérese a función real:  $i(\tau) = E(u + \tau v)$ , con  $\tau \in \mathbb{R}$ . Se  $u$  é un mínimo de  $E$ , entón  $i$  ten un mínimo relativo en  $\tau = 0$ , e, polo tanto:

$$i'(\tau)_{\tau=0} = 0. \quad (2.5)$$

Realizando os cálculos para a derivada obtense que:

$$\begin{aligned} i(\tau) &= E(u + \tau v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + \tau v)|^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \|1_{\Omega \setminus D}(u + \tau v - f)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (u + \tau v - f)^2 dx. \end{aligned}$$

Derivando con respecto a  $\tau$ :

$$\begin{aligned} i'(\tau) &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} 2 \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} 2 \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} dx + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (2v^2\tau + 2vu - 2fv) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} dx + \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (v^2\tau + vu - fv) dx. \end{aligned}$$



Polo que avaliando a anterior expresión en  $\tau = 0$  e igualando a cero, resulta:

$$\begin{aligned} 0 = i'(0) &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} dx + \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (v^2 \cdot 0 + vu - fv) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx + \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (vu - fv) dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Unha vez chegados a este punto, faise uso da seguinte fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\Gamma} uv(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) d\sigma, \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vector normal unitario exterior a  $\Gamma$  e  $\mathbf{e}_i$  é o iésimo vector da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Aplicase pois (2.7) ás dúas primeiras integrais de (2.6):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot v \right) dx + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) d\sigma \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot v \right) dx + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial y} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) d\sigma. \end{aligned}$$

É inmediato que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) d\sigma &= 0 \\ \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial y} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) d\sigma &= 0, \end{aligned}$$

pois  $v = 0$  sobre  $\Gamma = \partial\Omega$ . Logo:

$$\begin{aligned} 0 = i'(0) &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx + \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (u - f) \cdot v dx = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \cdot v \right) dx - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \cdot v \right) dx + \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (u - f) \cdot v dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Lémbrese a relación entre o operador nabla e o laplaciano dunha función  $f$ :

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (2.9)$$

Aplicando (2.9), a ecuación (2.8) queda:

$$\begin{aligned} 0 = i'(0) &= - \int_{\Omega} v \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx + \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (u - f) \cdot v dx = \\ &= - \int_{\Omega} v \cdot \nabla^2 u dx + \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (u - f) \cdot v dx = \\ &= - \int_{\Omega} v \cdot \Delta u dx + \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus D} (u - f) \cdot v dx. \end{aligned}$$

Polo tanto, cúmprese que:

$$-\Delta u = -\lambda \cdot 1_{\Omega \setminus D} \cdot (u - f) \quad \text{en } \Omega \setminus D,$$

a cal se denomina ecuación de Euler-Lagrange asociada ao funcional (2.4).

Concluindo, a ecuación de Euler-Lagrange para o problema de restauración dixital é:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda \cdot (f - u) \quad \text{en } \Omega \setminus D, \\ -\Delta u &= 0, \quad \text{en } D, \end{aligned} \tag{2.10}$$

con condicións de contorno:

$$u = 0, \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Esta formulación variacional é a máis sinxela de moitos posibles enfoques variacionais existentes na restauración de imaxes (Schönlieb [8]). Nótese que nesta formulación variacional estase a supoñer sempre que a imaxe é cero no contorno de  $\Omega$ , o que non é sempre certo pero tampouco é unha grave restrición. Tamén pódese tratar información da imaxe lixeiramente degradada, é dicir, ruidosa e non completamente nítida dentro da parte non estragada  $\Omega \setminus D$ . Esta última tamén se mellora durante o proceso de restauración.

## Capítulo 3

# Resultados numéricos

### 3.1. Algoritmo numérico de resolución

Considérase o problema anteriormente establecido (2.10). Resulta cómodo para escribir o problema recorrer de novo á función indicatriz anteriormente definida (1.3). Deste xeito é posible comprimir as dúas ecuacións do problema (2.10) nunha única ecuación, é dicir:

$$-\Delta u = \mathbf{1}_{\Omega \setminus D} \cdot \lambda \cdot (f - u). \quad (3.1)$$

Seguindo técnicas estándar, o problema a resolver (3.1) replázase por un análogo con variable auxiliar tempo para buscar a solución estacionaria do problema evolutivo seguinte:

$$\begin{cases} \Delta u + \mathbf{1}_{\Omega \setminus D} \cdot \lambda \cdot (f - u) = \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Entón, propónse o seguinte esquema numérico para a resolución:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = L_h \cdot u + \lambda \cdot \mathbf{1}_{\Omega \setminus D} \cdot (f - u), \quad (3.2)$$

onde  $n$  é un enteiro positivo e  $L_h$  é o operador Laplaciano discreto tal que:

$$L_h = \frac{1}{h^2} \cdot \begin{bmatrix} T & -I & & \\ -I & T & -I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -I & T & -I \\ & & -I & T \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -1 & 4 & -1 \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

sendo  $T$  de orde  $(n-1) \times (n-1)$ ,  $I$  a matriz identidade da mesma orde e  $h = 1$ .

Despexando entón,  $u^{n+1}$  de (3.2), obtense o seguinte esquema numérico:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot (L_h \cdot u + \lambda \cdot 1_{\Omega \setminus D} \cdot (f - u)). \quad (3.3)$$

que funciona como segue:

Dada  $u = 0$  inicial, constrúense unha nova,  $u_{new}$ , tal que:

$$u_{new} = u + \Delta t \cdot (L_h \cdot u + \lambda \cdot 1_{\Omega \setminus D} \cdot (f - u)).$$

A continuación, aplícase un test de parada cun umbral de tolerancia fixado,  $\mathcal{E}$ , tal que:

$$\text{Se } \|u_{new} - u\|_2 \leq \mathcal{E}$$

Fin, saída do bucle.

$$\text{Se } \|u_{new} - u\|_2 > \mathcal{E}$$

$$u = u_{new}$$

Volta ao inicio do bucle para seguir iterando co novo  $u$ .

Pódese ver o algoritmo completo de execución para o programa MatLab consultando o código do apéndice para máis detalles.

## 3.2. Exemplos de restauración harmónica

Nesta sección aplícase o algoritmo de restauración harmónica estudado a varias imaxes dixitais obtendo así diferentes conclusións sobre o seu funcionamento.

En primeiro lugar, unha imaxe (Schönlieb [8]) formada por liñas verticais en diferentes cores (Figura 3.1) á que se lle aplica dito algoritmo para estragala. Posteriormente o programa resolve o problema e devolve a imaxe arranxada (Figura 3.2). Téñase en conta que se está a considerar un valor fixado de  $\lambda = 10$ .

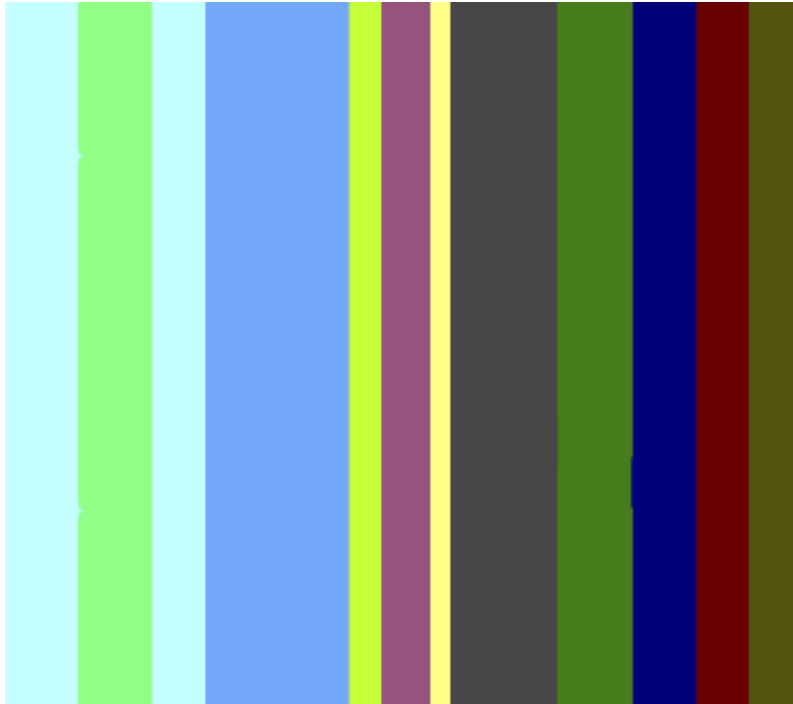


Figura 3.1: Primeira imaxe considerada.

Como se pode observar na imaxe da dereita da Figura 3.2, ao resolver o problema, a imaxe orixinal perde calidade, pois quedan pequenos difuminados. Malia iso, o programa resolve aceptablemente, pois continúa as cores no seu mesmo tono e as liñas verticais seguen a ser aceptablemente rectas.

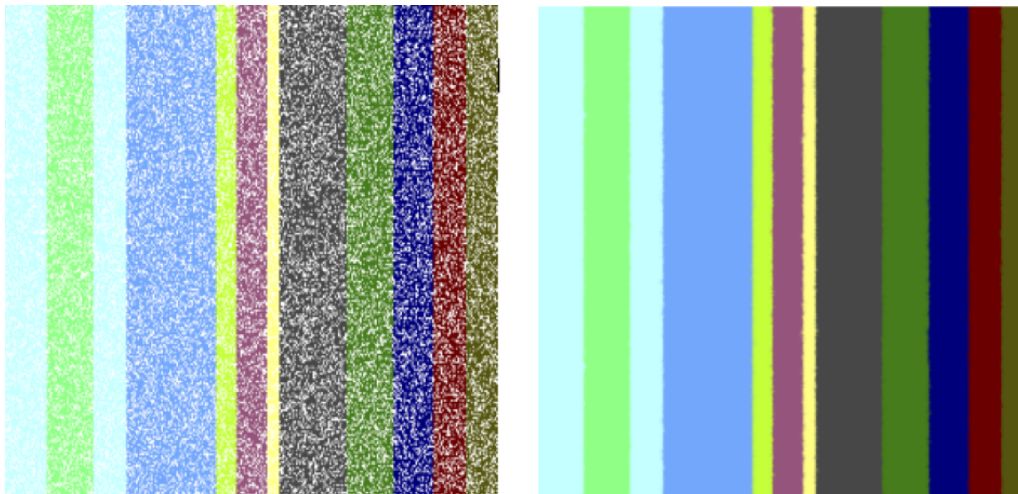


Figura 3.2: Á esquerda imaxe coas zonas estragadas tras aplicar o algoritmo, á dereita, solución dada.

Es segundo lugar, tense unha imaxe en escala de grises (Figura 3.3), na cal se desexa eliminar persoas que aparecen no fondo. Para iso créase unha máscara especial, a cal ao aplicala sobre a imaxe orixinal, superponse ó que se desexa retocar. Así, obsérvase na imaxe da esquerda da Figura 3.4 como o algoritmo estraga a imaxe inicial para unha posterior resolución.



Figura 3.3: Imaxe considerada.



Figura 3.4: Á esquerda imaxe coas zonas estragadas tras aplicar o algoritmo, á dereita, solución dada.

O resultado non é perfecto, pois obsérvase na imaxe da dereita da Figura 3.4 que aparece un lixeiro difuminado no lugar onde se estragou a imaxe para tratar de suprimir

as persoas que aparecen de fondo. Logo, a solución non é perfecta, pero cualitativamente é aceptable.

En terceiro lugar, trátase de suprimir no seguinte exemplo a planta do fondo para deixar só a figura do can (Figura 3.5). Para iso, créase de novo unha máscara especial de xeito que o programa estrague a fotografía inicial aplicando o algoritmo como se pode ver na imaxe da esquerda da Figura 3.6.



Figura 3.5: Imaxe considerada.



Figura 3.6: Á esquerda imaxe coas zonas estragadas tras aplicar o algoritmo, á dereita, solución dada.

Como solución obtense unha imaxe cun difuminado máis elevado na zona que se estragou previamente para eliminar o obxecto. Entón o algoritmo proposto non ofrece bos

resultados se as dimensións da zona a estragar aumentan. Nestes casos, un algoritmo de maior orde sería o indicado (Schönlieb [8]).

En cuarto lugar, analízase unha imaxe en azul e branco formada por diferentes figuras xeométricas planas á cal aplícaselle o algoritmo cunha máscara que estraga a imaxe inicial (Figura 3.7) superpoñendo liñas brancas sobre as figuras. Como nos exemplos anteriores, estase a traballar para un valor de  $\lambda = 10$  fixado.

De novo, pódese ver que o resultado final é un difuminado no bordo das figuras onde estaba a liña superposta polo algoritmo, mais o interior das figuras parece quedar aceptablemente solucionado como amosa a imaxe da dereita da Figura 3.8.

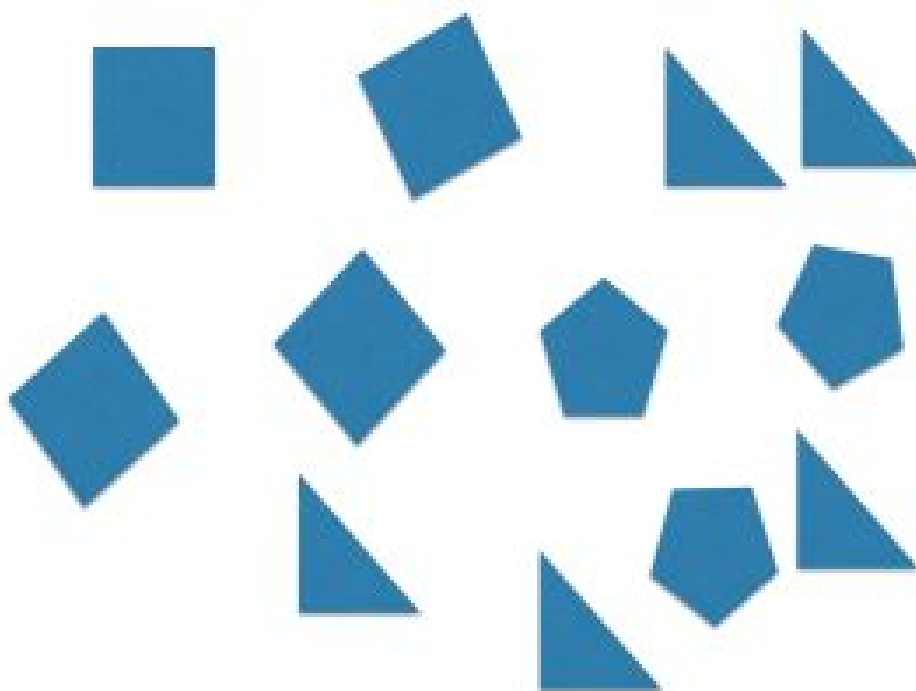


Figura 3.7: Imaxe considerada.



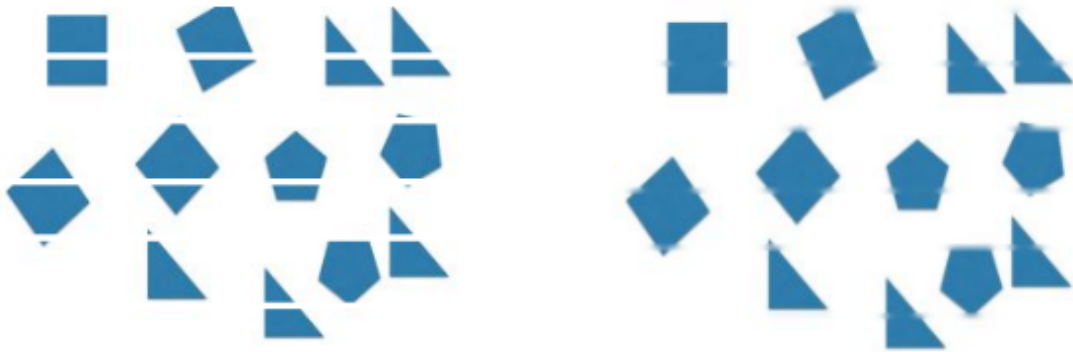


Figura 3.8: Á esquerda imaxe coas zonas estragadas tras aplicar o algoritmo, á dereita, solución dada.

Por último, inténtase arranxar unha imaxe estragada polo paso do tempo na que se atopan numerosas raiaduras (Figura 3.9).



Figura 3.9: Imaxe considerada.

Para iso, constrúese unha máscara adecuada de xeito que ao aplicarlle o algoritmo á imaxe inicial estrague a fotografía enriba das zonas onde aparecen as raiaduras producidas polo paso do tempo como xa se mencionou previamente (Figura 3.10). Obsérvase que o resultado dado é satisfactorio e o difuminado é, ao igual que na primeira imaxe, escaso.

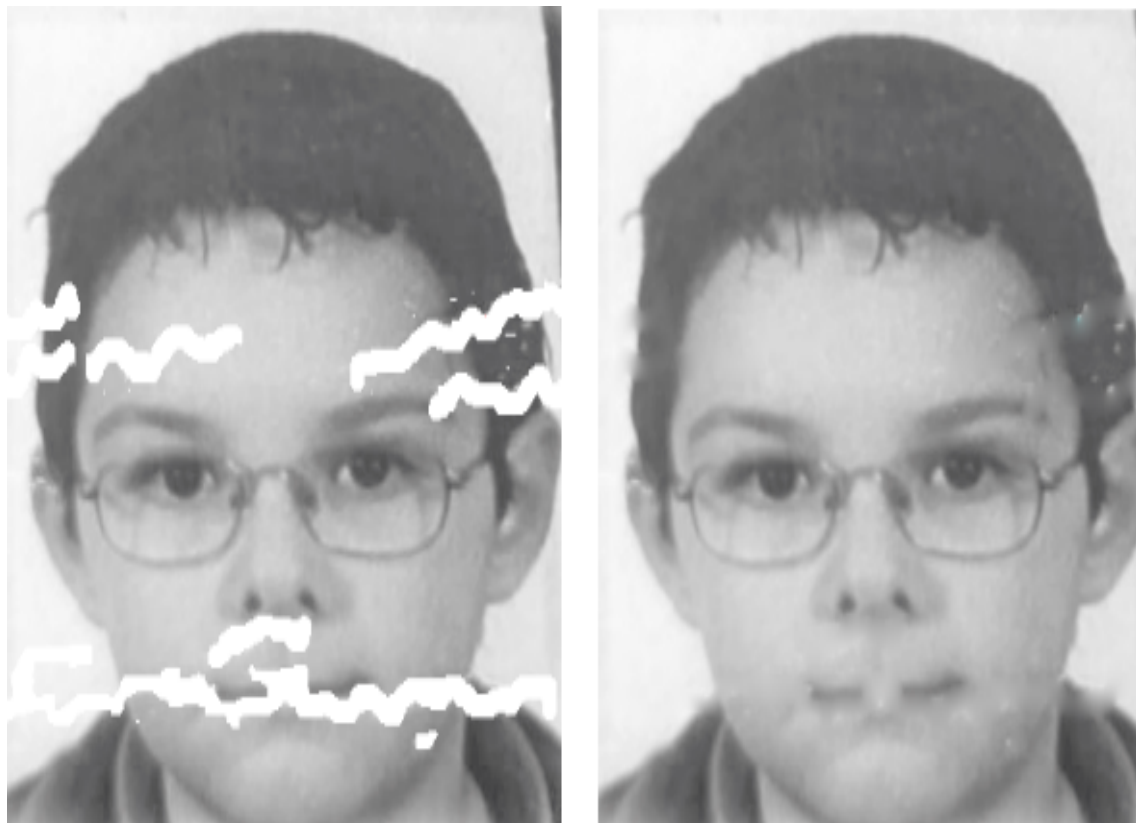


Figura 3.10: Á esquerda imaxe coas zonas estragadas tras aplicar o algoritmo, á dereita, solución dada.

Con todos estes exemplos anteriores, pode concluirse que o programa funciona ben se os defectos son liñas pequenas, pois case non queda rastro do retoque, mais se se quere arranxar áreas de maior tamaño, o programa non é efectivo, pois difumina a imaxe deixando constancia de onde estaba o erro. Ás veces, o algoritmo non resolve correctamente a interpolación se hai ambigüidade, por exemplo, os beizos do rapaz da imaxe que devolve o programa como solución, interpólanse co resto da cor da cara en lugar de continuar coa cor e liña dos beizos.

A continuación, analízase o que ocorre se se varía o valor da constante  $\lambda$ . Nótese que en todos os exemplos tratados anteriormente trabállase co valor  $\lambda = 10$ . Vólvase entón ao exemplo (3.1) onde con dito valor da constante se obtivo a imaxe da dereita da Figura 3.2.

Analizando como funciona o programa para outros valores de dita constante  $\lambda$  tense:

	valor	exemplo
$\lambda$	0.01	3.11
$\lambda$	5	3.12
$\lambda$	10	3.2
$\lambda$	20	3.13



Figura 3.11: Resultado para o valor  $\lambda = 0.01$ .

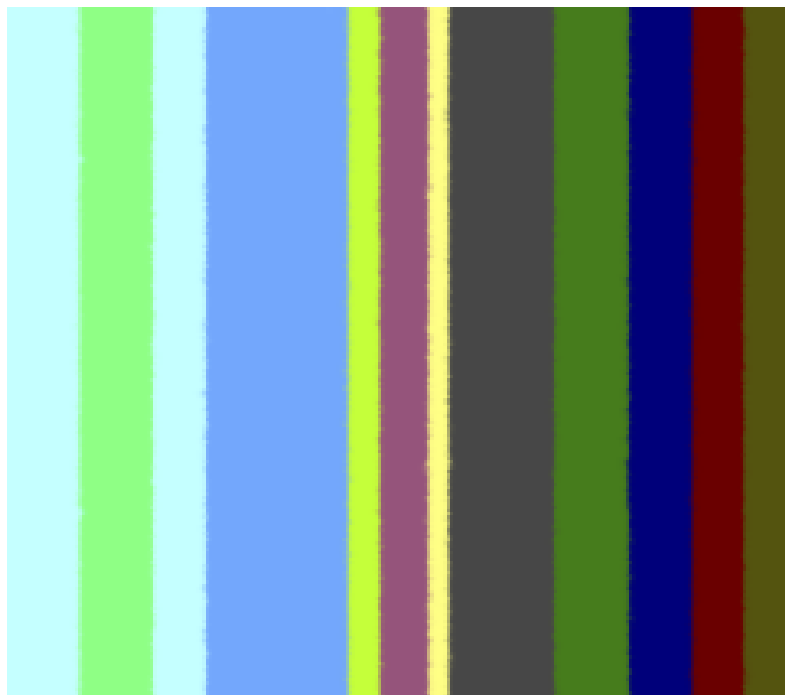


Figura 3.12: Resultado para o valor  $\lambda = 5$ .

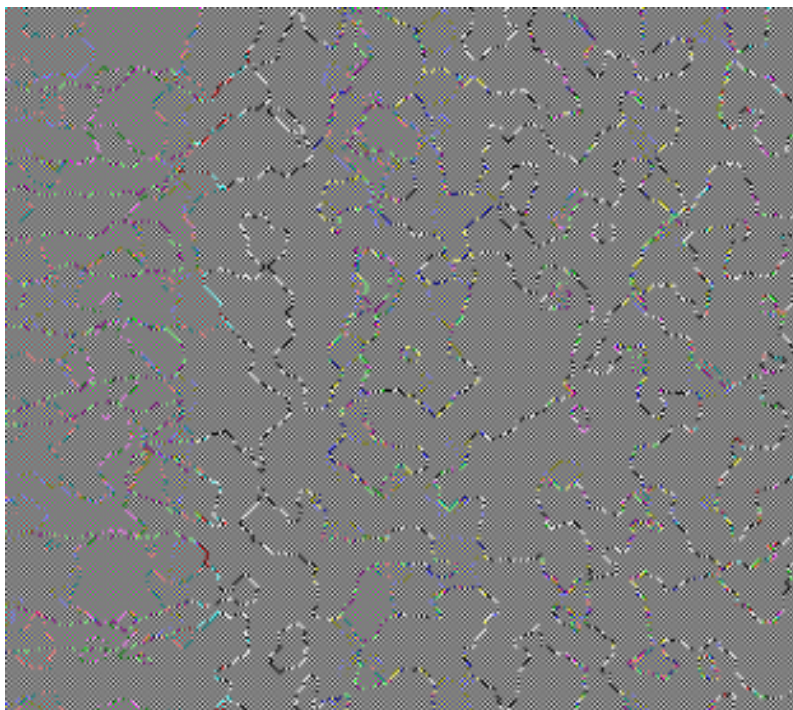


Figura 3.13: Resultado para o valor  $\lambda = 20$ .

Obsérvase pois, que para valores moi pequenos da constante  $\lambda$  o resultado final produce un difuminado xeral en toda a fotografía (Figura 3.11). Se pola contra, se incrementa dito valor (Figura 3.12), a imaxe perde ese difuminado xeneralizado e van quedando só restos deste nos lugares onde o algoritmo estragou dita imaxe. Finalmente, se o valor de  $\lambda$  é elevado (Figura 3.13), o resultado dista moito da foto orixinal.

	valor	exemplo
$\lambda$	0.1	3.14
$\lambda$	5	3.15
$\lambda$	10	3.4
$\lambda$	15	3.16



Figura 3.14: Resultado para o valor  $\lambda = 0.1$ .



Figura 3.15: Resultado para o valor  $\lambda = 5$ .

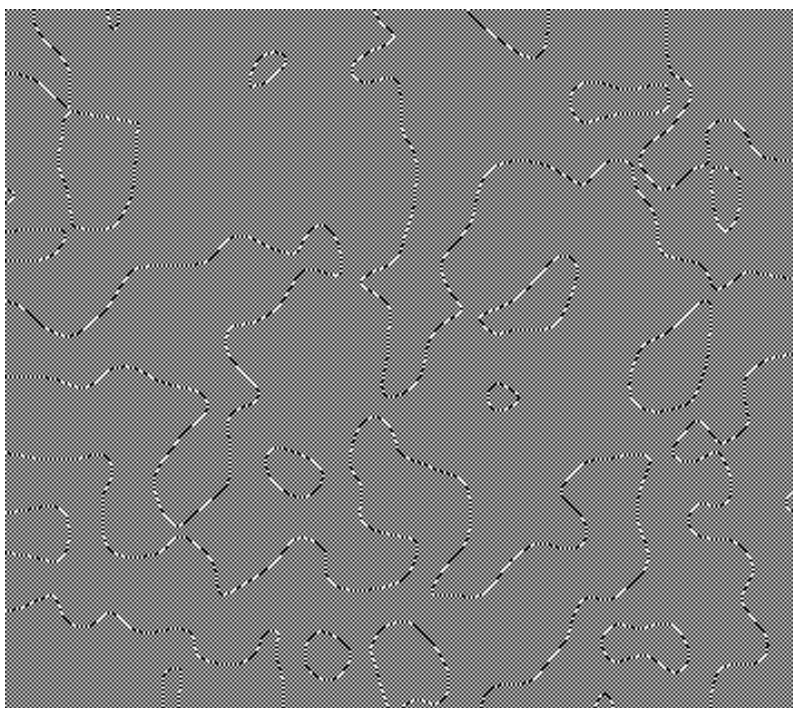


Figura 3.16: Resultado para o valor  $\lambda = 15$ .

Os resultados anteriores son semellantes aos obtidos para a Figura 3.1, pois os valores máis pequenos dados a  $\lambda$  están preto de cero, e polo tanto o programa resolve o problema deixando a imaxe cun difuminado xeral, e os valores máis altos considerados están lonxe do valor inicial considerado  $\lambda = 10$ , e como consecuencia o programa soluciona o problema devolvendo unha imaxe que difire moito da orixinal.

Véxase o último exemplo (Figura 3.9). Neste caso lémbrese que estase a engadir a máscara de zonas faltantes á imaxe para posteriormente eliminar as raiaduras producidas polo paso do tempo. Neste caso, como menor valor de  $\lambda$  considérase un número enteiro e non un número decimal preto de cero como nos anteriores,  $\lambda = 2$ . Ademais, cóllese como o maior  $\lambda$  un valor preto do xa analizado  $\lambda = 10$ , neste caso  $\lambda = 11$ .

	valor	exemplo
$\lambda$	2	3.17
$\lambda$	10	3.10
$\lambda$	11	3.18



Figura 3.17: Resultado para o valor  $\lambda = 2$ .



Figura 3.18: Resultado para o valor  $\lambda = 11$ .

Fixándose nas dúas solucións dadas polo programa, Figura 3.17 e Figura 3.18, pódese observar que non hai demasiada diferenza entre elas malia a ser resoltas cun valor da constante  $\lambda$  diferente. Ámbalas dúas presentan rastros nos lugares onde o algoritmo as estragou, pero o resultado é aceptable en comparación cos obtidos anteriormente nos outros exemplos para outros valores de  $\lambda$  diferentes aos escollidos neste caso. Tamén, nótese que este par de resultados non difiren tampouco do obtido anteriormente para o valor  $\lambda = 10$  (Figura 3.10).







# Conclusións

O algoritmo de restauración harmónica que se estuda neste traballo céntrase na restauración de imaxes dixitais mediante un algoritmo que aplica unha máscara á imaxe que se desexa modificar, de xeito que nun primeiro momento estraga dita imaxe para que posteriormente, tras a resolución do problema, devolva a imaxe arranxada ou retocada como a solución a este.

Matematicamente, esta execución consiste en resolver a ecuación de Euler-Lagrange para o problema de restauración dixital (2.10) a cal pódese comprimir noutra máis sinxela (3.1) empregando a función indicatriz (1.3). Ademais, substituíndo o problema (3.1) por un análogo con variable auxiliar tempo para buscar a solución estacionaria do problema evolutivo, pódese deducir un esquema numérico para a búsqueda de solución deste algoritmo (3.3).

Visualmente obtéñense resultados pouco satisfactorios se o que se quere é retocar unha imaxe dixital como se dun photoshop se tratase (3.6), pois a solución do algoritmo devolve imaxes nas que é posible detectar os lugares onde o algoritmo estragou a imaxe. Ademais, isto acentúase se as máscaras empregadas estragan rexións de maior área, pero se o algoritmo estraga pequenas áreas o resultado é aceptable (3.10).

Estes resultados varían en función dos valores que se lle den á constante  $\lambda$ , pois dita constante dalle máis ou menos peso aos termos da ecuación empregada. Así, con un  $\lambda$  moi próximo a cero, a imaxe queda totalmente difuminada (3.14), e cun  $\lambda$  que sexa maior que 10, o resultado difire de tal xeito que a imaxe queda de cor gris na súa maioría (3.13). Con todo isto, pode concluírse que os mellores resultados se obteñen para un valor de  $\lambda = 10$ , pois o número de iteracións que realiza o algoritmo para conseguir a nova imaxe é menor que con calquera outro valor. En resumo, o algoritmo non é satisfactorio en canto a retoque de fotografías se refire, pero a nivel cualitativo, si da resultados aceptables para unha análise posterior da imaxe para extraer información dela. Un algoritmo de maior orde poderá dar resultados de retoque máis aceptables.



# Bibliografía

- [1] G. Aubert, and P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Springer, Applied Mathematical Sciences, Vol 147, 2006.
- [2] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester, *Image Inpainting*, Siggraph 2000, Computer Graphics Proceedings, pp.417–424, 2000.
- [3] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [4] Ferreira Doval, Nuno. *Estudio e implementación de un algoritmo para reducir el ruido en imágenes bidimensionales*. Trabajo de Fin de Grado de Matemáticas. Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 2018.
- [5] Meijide Suárez, Pedro. *Comparación de modelos en la reducción de ruido de imágenes digitales bidimensionales*. Trabajo de Fin de Grado de Matemáticas. Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 2019.
- [6] G. Sapiro, *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge-UK, 2001.
- [7] C.-B. Schönlieb, *Modern PDE Techniques for Image Inpainting*, PhD Thesis, University of Cambridge, Cambridge 2009.
- [8] C.-B. Schönlieb, *Partial Differential Equation Methods for Image Inpainting*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics (No. 29), Cambridge University Press 2015.
- [9] Brézis, H., Análisis funcional, 1st ed., Alianza editorial, Madrid, 1984.
- [10] Tony F. Chan e Sung Ha Kang. Análise do erro de restauración de imaxes dixitais. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 26(1-2):85-103, 2006.

- [11] Jianhong Shen e Tony F. Chan. Mathematical models for a local nontexture inpain-  
tings. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62(3):1019-43, 2002.

# Apéndice





# Programa de inpainting

```
% MATLAB Codes for the Image Inpainting Problem
% Copyright (c) 2016, Simone Parisotto and Carola-Bibiane
% Schoenlieb All rights reserved.
% Redistribution and use in source and binary forms, with
% or without modification, are permitted provided that the
% following conditions are met:
% 1. Redistributions of source code must retain the above
%    copyright notice, this list of conditions and the
%    following disclaimer.
% 2. Redistributions in binary form must reproduce the
%    above copyright notice, this list of conditions and
%    the following disclaimer in the documentation and/or
%    other materials provided with the distribution.

% THIS SOFTWARE IS PROVIDED BY THE COPYRIGHT HOLDERS AND
% CONTRIBUTORS "AS IS" AND ANY EXPRESS OR IMPLIED WARRANTIES,
% INCLUDING, BUT NOT LIMITED TO, THE IMPLIED WARRANTIES OF
% MERCHANTABILITY AND FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE ARE
% DISCLAIMED. IN NO EVENT SHALL THE COPYRIGHT HOLDER OR
% CONTRIBUTORS BE LIABLE FOR ANY DIRECT, INDIRECT, INCIDENTAL,
% SPECIAL, EXEMPLARY, OR CONSEQUENTIAL DAMAGES (INCLUDING,
% BUT NOT LIMITED TO, PROCUREMENT OF SUBSTITUTE GOODS OR SERVICES;
% LOSS OF USE, DATA, OR PROFITS; OR BUSINESS INTERRUPTION)
% HOWEVER CAUSED AND ON ANY THEORY OF LIABILITY, WHETHER
% IN CONTRACT, STRICT LIABILITY, OR TORT (INCLUDING
% NEGLIGENCE OR OTHERWISE) ARISING IN ANY WAY OUT OF THE USE OF THIS
% SOFTWARE, EVEN IF ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGE.
```

```
% Authors:
% Simone Parisotto (email: sp751 at cam dot ac dot uk)
% Carola-Bibiane Schoenlieb (email: cbs31 at cam dot ac dot uk)

% Address:
% Cambridge Image Analysis
% Centre for Mathematical Sciences
% Wilberforce Road
% Cambridge CB3 0WA
% United Kingdom

% Date:
% September, 2016

function inpainting_harmonic(imagefilename,...
maskfilename,lambda,tol,maxiter,dt)

%% CREATE A log FILE WHERE TO STORE RESULTS IN txt FORMAT

logfile = 'log_harmonic.log';
if exist(logfile,'file')
delete(logfile);
end

fileID = fopen(logfile,'w');

%% IMPORT THE CLEAN INPUT AND THE MASK

iminfo = iminfo(imagefilename);
input = im2double(imread(imagefilename));

%check if grayscale/truecolor dimension of image grey/colour

colors = size(input,3);
```

```

mask    = im2double(imread(maskfilename));
mask = double(mat2gray(mask)>0);
if size(mask,3)==1 && colors>1
mask = repmat(mask,[1,1,colors]);
end

%% % INITIALIZATION OF u

u_start = (~mask).*input + mask;
u_end   = zeros(iminfo.Height,...
iminfo.Width,colors);

%% % GRID INTERVAL FOR AXIS ij

h1 = 1; h2 = 1;

%% % LAPLACIAN

d2i = toeplitz(sparse([1,1],[1,2],[-2,1]/h1^2,...
1,iminfo.Height));
d2j = toeplitz(sparse([1,1],[1,2],[-2,1]/h2^2,...
1,iminfo.Width));

% NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS

d2i(1,[1 2])          = [-1 1]/h1;
d2i(end,[end-1 end]) = [1 -1]/h1;
d2j(1,[1 2])          = [-1 1]/h2;
d2j(end,[end-1 end]) = [1 -1]/h2;

% 2D domain LAPLACIAN

L = kron(speye(iminfo.Width),d2i)+...
kron(d2j,speye(iminfo.Height));

```

```

%% FREE MEMORY
clear d2i d2j

%% ALGORITHM

u = reshape(u_start, iminfo.Height * ...
    iminfo.Width, colors);
f = reshape(u_start, iminfo.Height * ...
    iminfo.Width, colors);
channel_mask = reshape(mask, iminfo.Height * ...
    iminfo.Width, colors);

% FOR EACH COLOR CHANNEL

    for k=1:colors
        for iter = 1:maxiter

% COMPUTE NEW SOLUTION

            unew = u(:,k) + dt*(L*u(:,k) + ...
                lambda*(~channel_mask(:,k)).*(f(:,k)-u(:,k)));

% COMPUTE EXIT CONDITION

            diff = norm(unew-u(:,k))/norm(unew);

% UPDATE-ACTUALIZAR

            u(:,k) = unew;

% TEST EXIT CONDITION

            if diff < tol
                break
            end
        end
    end
end

```

```

% WRITE ON log FILE

fprintf(fileID ,...
'Channel %d: Iterations: %d,Normalised difference of u: %2.4e\n',...
k,iter ,diff);

u_end(:, :, k) = reshape(u(:, k), iminfo.Height , iminfo.Width);
end

fclose(fileID);

%% WRITE IMAGE OUTPUT

imwrite(u_start , 'masked_harmonic.png')
imwrite(u_end, 'output_harmonic.png')

return

```